請將答案寫在試卷上，並請標明題號

國立臺灣大學物理學系大學申請數學科試題　96.03.31

1．一模型公司在一個內部邊長為 2 單位的透明正立方體箱子內，放置一顆半徑為 1 單位的黃球，然後又要在箱子的八個角落再塞入 8 顆半徑相同的小紅球。試求小紅球的最大半徑為多少單位？（１０％）

2. 已知 $\exp(i\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ 其中 $i=\sqrt{-1}$。函數 $\exp(x)$ 也可以用無窮級數 $\exp(x)=$

$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ 來表示。請證明下列無窮級數表示方式: $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$

（１０％）及 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$（１０％）。

3. 已知方程式 $x^3+x^2-10x-6=0$ 有一根是整數，則另外兩個根是多少?（１０％）

4. 已知 $W=\dfrac{N!}{(\frac{N}{2})!(\frac{N}{2})!}$ 其中 N 為相當大的偶數。而符號 $n!=1\times2\times3\times\ldots\times n$ 表示任意整數 n 的階乘。利用史特靈近似公式 $\log(N!)\approx N(\log N)-0.43429N$，試證明 $\log(W)\approx N\log 2$。（１０％）

5. 若點 $P(a,b)$ 在圓 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上，則 $3a+4b$ 的最大值為何?（１０％）

6. 對於矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{bmatrix}$ 設 $A^n=\begin{bmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{bmatrix}$ $(n=1,2,\ldots\ldots)$ 則證明

(a) $a_n=d_n$ 且 $b_n=c_n$。（１０％） (b) $a_n+b_n=1$。（１０％）

7. 試證明 $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}>\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}(n=1,2,\ldots..)$。（１０％）

8. 已知曲線 $5x^2+2\sqrt{3}xy+7y^2+4=0$，試求此曲線向 x 軸方向平行移動 -1 所得的曲線方程式?（１０％）