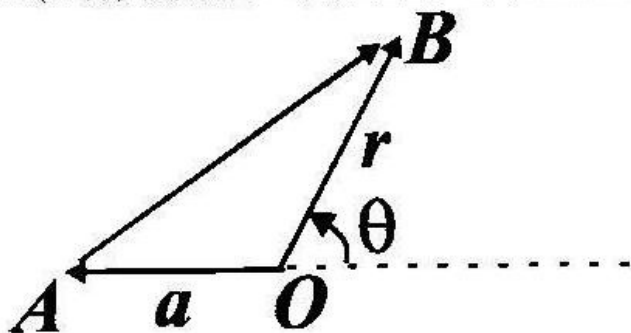


1. (30 分)

- (a) (8 分) N 個相同的球放進 M 個不同袋子有幾種放法？
 (b) (8 分) 隨便拿起一個袋子裡面有 L 個球的機率是多少？
 (c) (7 分) 隨便拿起兩個袋子裡面都有球的機率是多少？
 (d) (7 分) 如果每個袋子最多只能放一個球，有幾種放法？($M > N$)

2. (30 分) 如圖所示，我們可以將三個向量的關係寫成 $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ 。

(a) (10 分) 請據此證明

$$\overline{AB}^2 = r^2 + a^2 + 2ra \cos \theta$$

(b) (20 分) 橢圓的定義是：與兩個定點(圖中的 O 及 A)距離和為一常數的所有點形成的集合。
 請證明：橢圓上的點 B 和 O 點間之距離 r 滿足

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos \theta}.$$

其中 r_0 及 e 是常數，且 e 小於 1。(註：不論會不會做(a)，你都可以套用(a)的結果。)

3. (40 分) 有些時候我們在沒有公式可代的情況下仍可發明出一些招數去解出方程式的近似根來。例如我們若忘了二次方程式根的公式，則面對

$$-\epsilon x^2 + x - 1 = 0$$

(ϵ 是個小於 0.01 的正實數)時可以先猜測 $-\epsilon x^2$ 的數值可能很小，因此想出其中一根的最粗略近似是

$$x_0 \approx 1.$$

接著我們用下式去求出更進一步之近似：

$$x_1 \approx 1 + \epsilon x_0^2 = 1 + \epsilon \cdot 1^2 = 1 + \epsilon.$$

更一般來講我們有

$$x_n \approx 1 + \epsilon x_{n-1}^2.$$

- (a) (20 分) 請利用數學歸納法證明 x_n 是個遞增序列，且 x_n 恆小於 2。
 (b) (5 分) 以上表明了 x_n 恆有一個極限。請問這是根據實數的什麼性質才可以下此結論？
 (c) (5 分) 請證明 x_n 的極限 x_∞ 確實是原方程式的根。
 (d) (10 分) 以上招數只讓我們求出二次方程式的一個根。你能否仿照以上做法發明一個遞迴近似法去找出另外那個根來？(只須列出怎麼做就可以了，不需證明)